پیوست اول

اعداد مختلط

از زمان‌های بسیار دور انسان **اعداد طبیعی** $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ یا به اصطلاح اعداد شمارشی را می‌شناخت. این سئوال مطرح شد که برای هر $m,n\in N$ آیا معادله (1) $m+x=n$ در N دارای جواب است؟ پاسخ منفی است زیرا عددی مانند x در N وجود ندارد که به عنوان مثال معادله $10+x=5$ دارای جواب باشد. لذا به فکر توسعه اعداد افتادند و مجموعه **اعداد صحیح** $Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n,\ldots\}$ را ساختند. در این مجموعه بدیهی است که هر معادله به شکل (1) دارای جواب است. سپس به این سوال پرداختند که آیا برای هر $m,n\in Z$ معادله (2) $mx=n$ دارای جواب است؟ در اینجا هم پاسخ منفی است زیرا معادله $(-4)x=17$ در Z دارای جواب نیست. پس Z را هم توسعه دادند و مجموعه **اعداد منطق (گویای)**

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in Z\ ,n\neq 0\right\}$$

را ساختند. در این مجموعه مسلماً (2) دارای جواب است. اصولاً، به معنائی که خواهیم دید، Q یک میدان است. در این مجموعه می‌توان جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (بر غیر صفر) را انجام داد و نتیجه عمل باز هم عضوی از Q است. تا مدت‌های مدید تصور بر این بود که کلیه اعداد منطق هستند. اکنون با ابزار هندسی و انتخاب واحدی مناسب می‌توان مثلث قائم‌الزاویه زیر را ساخت که در آن مطابق شکل

شکل ۱

$\overline{AB}=\overline{AC}=1$. می‌دانیم که $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ و لذا $\overline{BC}^2=2$. پس قطعه خطی داریم که مربع طول آن 2 است و ما طول $\overline{BC}$ را با $\sqrt{2}$ نشان می‌دهیم. به سادگی، و با استفاده از نظریه

مقدماتی اعداد، می‌توان نشان داد که $\sqrt{2}$ نمی‌تواند عددی منطق باشد. اعدادی را که منطق نباشند **اصم (گنگ)** می‌نامند. حال

$$R = Q \cup \{\text{اعداد اصم}\}$$

را مجموعه **اعداد حقیقی** می‌نامند. قسمت اعظم ریاضیات کار با اعداد حقیقی است، با وجود این معادله درجه دوم $x^2+1=0$ یا بطور کلی معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta = b^2-4ac<0$ در مجموعه اعداد حقیقی R دارای جواب نیستند. بحث اصلی ما در حقیقت از اینجا شروع می‌شود که به دنبال ساختن دستگاهی از اعداد هستیم که در آن معادلاتی نظیر معادلات بالا دارای جواب باشند.

مجموعه C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C=\{(a,b)\ |a,b\in R\}.$$

بر C اعمال تساوی، جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم:

(1). **تساوی**: به ازای هر $(a,b),(c,d)\in C$

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\ ,b=d.$$

(2). **جمع**: به ازای هر $(a,b),(c,d)\in C$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$

(3). **ضرب**: به ازای هر $(c,d)\in C$ و (a,b)

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd\,,ad+bc).$$

دیده می‌شود که مجموعه C نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است (یعنی، حاصل این اعمال بر هر دو عضو C مجدداً عضوی از C می‌باشد).

اعمال جمع و ضرب در C دارای خواص زیر می‌باشند:

فرض کنیم $(e,f),(c,d),(a,b)$ عضوهای دلخواهی از C باشند. در این صورت:

(1). $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$، شرکتپذیری عمل جمع.

(2). $(0,0),(a,b)+(0,0)=(a,b)$ را عضو صفر یا عضو خنثی نسبت به عمل جمع می‌نامند.

(3). $(-a,-b),(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$ را قرینه (a,b) یا وارون آن نسبت به عمل جمع می‌نامند.

(4). $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$، یعنی عمل جمع تعویضپذیر است.

(5). $[(a,b)(c,d)](e,f)=(a,b)[(c,d)(e,f)]$، شرکتپذیری عمل ضرب.

(6). $(a,b)\,(c,d)=(c,d)(a,b)$، یعنی عمل ضرب تعویضپذیر است.

(7). $(1,0),(a,b)(1,0)=(a,b)$ عضو یک یا عضو خنثی نسبت به عمل ضرب نامیده می‌شود.

(8). اگر $(a,b)\neq(0,0)$، آنگاه عضوی مانند $(x,y)\in C$ وجود دارد به طوری که

$$(a,b)(x,y)=(1,0).$$

(x,y) را وارون (a,b) نسبت به عمل ضرب نامیده و آن را $(a,b)^{-1}$ نشان می‌دهند.

(9). $(a,b)[(c,d)+(e,f)]=(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)$، توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع.

اثبات کلیه خواص بالا آسان است، به عنوان مثال (8) را ثابت می‌کنیم. داریم

$$(a,b)(x,y)=(1,0)\Leftrightarrow(ax-by,ay+bx)=(1,0)$$
$$\Leftrightarrow ax-by=1, ay+bx=0\,.$$

فرض کنیم $a\neq 0$، پس $y=\frac{-bx}{a}$ و $ax-b\left(-\frac{bx}{a}\right)=1$. نتیجه می‌گیریم که

$$x=\frac{a}{a^2+b^2}\;,\;y=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

، یعنی $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

مجموعه C با اعمال جمع و ضرب تعریف شده و خواص (1) - (9) یک **میدان** نامیده می‌شود. مجموعه C را **میدان اعداد مختلط** می‌نامند. اکنون فرض کنیم $A=\{(a,0)\,|a\in R\}$، پس $A\subset C$. تابع $f:R\to A$ باضابطهٔ $f(a)=(a,0)$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که f تابعی یک به یک و پوشاست. به علاوه

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(a.b)=f(a).f(b)\,.$$

لذا تناظری ۱-۱ بین A,R برقرار است، یعنی $R\cong A$. بدین خاطر است که اعضای A و R را یکسان در نظر می‌گیریم، $a\leftrightarrow(a,1)$. با این تناظر است که R را به عنوان زیر مجموعه‌ای از C به حساب می‌آورند. توجه کنید که هر دوی A و R در خواص (1) - (9) برای یک میدان صدق می‌کنند. عضو $i=(0,1)\in C$ را در نظر گرفته و داریم

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)\,.$$

به این دلیل و با توجه به آنچه در بالا گفتیم از علامت $i=\sqrt{(-1,0)}=\sqrt{-1}$ استفاده می‌کنیم اما بایستی دقت کنید که $\sqrt{-1}$ معنای رایج در اعداد حقیقی را ندارد.

اکنون فرض کنیم $(a,b)\in C$. می‌توان نوشت

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)$$
$$=a+ib$$

(با توجه به $R\cong A$)

و این صورت دیگری از اعداد مختلط است که از حالا به بعد با آن سر و کار داریم.

تبصره: در معادله $x^2+1=0$ اگر ضرایب عضو C فرض شوند داریم

$$x^2+(1,0)=(0,0)$$

و بدیهی است که $i^2+(1,0)=(-1,0)+(1,0)=(0,0)$، یعنی معادله $x^2+1=0$ در C دارای جواب است.

فرض کنیم $z=a+ib$ عدد مختلط دلخواهی باشد. i **واحد موهومی** نامیده شده و با

$$i=\sqrt{-1} \text{ یا } i^2=-1$$

تعریف می‌گردد. a را **قسمت حقیقی** و b را **قسمت موهومی** عدد مختلط z نامیده و می‌نویسیم

$$b=\operatorname{Im} z \text{ و } a=\operatorname{Re} z .$$

اگر $a=0$، آنگاه عدد $0+ib=ib$ یک **موهومی محض** نامیده شده و اگر $b=0$ آنگاه عدد حقیقی $a+i\,0=a$ را داریم.

اگر $z_1=x_1+iy_1 , z_2=x_2+iy_2$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

(1). $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2 , y_1=y_2$

(2). $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

(3). $z_1.z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

تبصره: (1) در صورتی که قانون ضرب در اعداد مختلط را فراموش کرده باشیم با استفاده از ضرب معمولی داریم

$$z_1.z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2 .$$

اکنون $i^2=-1$ قرار داده و پس از دسته‌بندی بدست می‌آوریم

$$z_1.z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

(2) داریم $i^2=-1 , i^3=-i , i^4=-i^2=1$. به طور کلی

$$i^{4k}=1 , i^{4k+1}=i , i^{4k+2}=-1 , i^{4k+3}=-i. \quad (k\in N)$$

(3) هیچ عدد مختلطی را نمی‌توانیم بر $0+i\,0=(0,0)$ تقسیم کنیم. اما اگر $a+ib\neq 0$، آنگاه تقسیم به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2} .$$

نتیجه کار عدد مختلط $x+iy$ است که در آن

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2} , y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

و $a^2+b^2\neq 0$ به دلیل آنکه $a+ib=(a,b)\neq(0,0)$.

(4) عدد مختلط z مساوی با صفر است؛ $z=a+ib=0$ اگر و فقط اگر $a=0$, $b=0$.

نمایش هندسی اعداد مختلط: هر عدد مختلط $z = a + ib$ را می‌توان در صفحه $xy-$ با یک نقطه مانند $A(a,b)$ به مختصات a و b نمایش داد. بر عکس، هر نقطه $M(x,y)$ از صفحه وابسته به یک عدد مختلط $z = x + iy$ است.

صفحه‌ای را که اعداد مختلط بر روی آن نمایش داده می‌شود **صفحه متغیر مختلط** z یا **صفحه مختلط** می‌نامند (مطابق شکل زیر).

شکل ۲

نقاطی از صفحه مختلط که روی محور Xها هستند متناظر به اعداد حقیقی $(b = 0)$ می‌باشند. نقاط روی محور Yها نمایش اعداد موهومی محض هستند، زیرا $a = 0$. بنابراین در صفحه مختلط، محور Yها **محور موهومی**، و محور Xها **محور حقیقی** نامیده می شود. با وصل نقطه $A(a,b)$ به مبدأ مختصات، بردار $\vec{OA}$ را بدست می‌آوریم. گاهی اوقات، مناسب است که بردار $\vec{OA}$ را به عنوان نمایش هندسی عدد مختلط $z = a + ib$ در نظر بگیریم.

شکل قطبی یک عدد مختلط: فرض کنیم $A(a,b)$ نقطه‌ای از صفحه مختصات باشد. از A به مبدأ مختصات وصل کرده، $\overline{OA} = r$ (که در آن $r \geq 0$) می‌نامیم و زاویه‌ای را که $\overline{OA}$ با جهت مثبت محور Xها می‌سازد با q نمایش می‌دهیم. زوج (r,q) **مختصات قطبی** نقطه A، مبدأ مختصات **قطب** و جهت مثبت محور Xها، **محور قطبی** نامیده می‌شود. در این صورت (شکل ۲) روابط آشنای

$$a = r\ \cos q \qquad , b = r \sin q$$

را داریم، و بنابراین، عدد مختلط را می‌توان به شکل

$$a + ib = r\cos q + i\,r\sin q \quad \text{یا} \quad z = r(\cos q + i\sin q) \quad (1)$$

نمایش داد. عبارت طرف راست (1) **نمایش قطبی** عدد مختلط $z=a+ib$ نامیده شده، به r **مدول** عدد مختلط z و به q **آرگومان** عدد مختلط z می‌گویند. آن‌ها را به صورت

$$r=|z| \text{ و } q=\arg z$$

نشان می‌دهند. کمیت‌های q,r بر حسب b,a به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \text{ و } q=arc\,tg\frac{b}{a}\ .$$

به طور خلاصه

$$\begin{cases}|z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}\\ \arg z=\arg(a+ib)=arc\,tg\dfrac{b}{a}\ .\end{cases}\qquad (2)$$

آرگومان یک عدد مختلط مثبت در نظر گرفته می‌شود هرگاه نسبت به محور Xها حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، و منفی در نظر گرفته می‌شود هرگاه حرکت در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. بدیهی است که آرگومان q به طور منحصر به فرد تعیین نمی‌گردد بلکه با احتساب $2kp$، که در آن k عدد صحیحی است محاسبه می‌گردد.

تعریف: فرض کنیم $z=x+iy$ عدد مختلط دلخواهی باشد. **مزدوج** z به صورت $\bar{z}=x-iy$ تعریف می‌گردد. از نظر هندسی نقطه متناظر به $\bar{z}$ در صفحه مختصات قرینه نقطه متناظر به z نسبت به محور Xهاست. همچنین **قدر مطلق** z، که آن را با $|z|$ نشان می‌دهیم، به صورت $|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$ تعریف می‌شود و در حقیقت مساوی با فاصله نقطه متناظر به z در صفحه مختصات تا مبدأ می‌باشد.

همچنین داریم $z\bar{z}=x^2+y^2$ یا $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

قضیه ۱ : اعداد مختلط $z_1=r_1(\cos q_1+i\sin q_1)$,$z_2=r_2(\cos q_2+\sin q_2)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

(i) $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(q_1+q_2)+i\ \sin(q_1+q_2)\right)$.

(ii) اگر $z_2\neq 0$ آنگاه $z_2^{-1}=\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{r_2}(\cos q_2-i\sin q_2)$.

(iii) اگر $z_2\neq 0$ آنگاه $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(q_1-q_2)+i\sin(q_1-q_2))$.

اثبات. (i) داریم

$$z_1z_2=r_1\,r_2(\cos q_1+i\sin q_1)(\cos q_2+i\sin q_2)$$

$$\begin{aligned}&= r_1 r_2 [\cos q_1 \cos q_2 + i \cos q_1 \sin q_2 + i \sin q_1 \cos q_2 + i^2 \sin q_1 \sin q_2] \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) + i (\sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2) \right] \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(q_1 + q_2) + i \sin(q_1 + q_2) \right) ,\end{aligned}$$

یعنی برای آن که دو عدد مختلط را در هم ضرب کنیم کافی است مدول‌های آنها را در هم ضرب کرده و آرگومان‌هایشان را با هم جمع کنیم

شکل ۳

(ii) داریم

$$\begin{aligned} z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos q_2 + i \sin q_2)} \\ &= \frac{\cos q_2 - i \sin q_2}{r_2\left(\cos^2 q_2 + \sin^2 q_2\right)} \\ &= \frac{1}{r_2}(\cos q_2 - i \sin q_2) = \frac{1}{r_2}\left(\cos(-q_2) + i \sin(-q_2)\right), \end{aligned}$$

یعنی برای آن که عدد مختلط غیر صفری را وارون نمائیم کافی است مدول آن را وارون کرده و آرگومانش را به منها تبدیل کنیم.

(iii) داریم

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2} &= r_1(\cos q_1 + i \sin q_1) . \frac{1}{r_2}\left(\cos(-q_2) + i \sin(-q_2)\right) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2)\right), \end{aligned}$$

یعنی برای آن که دو عدد مختلط را بر هم تقسیم نماییم کافی است مدول‌های آنها را بر هم تقسیم کرده و آرگومانهایشان را از هم کم کنیم.

مثال ۱: فرض کنیم $z_1 = 1 + i \, , z_2 = \sqrt{3} - i$. حاصلضرب $z_1 z_2$ و خارج قسمت $\frac{z_1}{z_2}$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا z_1 , z_2 را در شکل قطبی می‌نویسیم:

$$z_1 = 1+i \qquad : \qquad r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\, q_1 = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

و با توجه به این که نقطه متناظر به z_1 در صفحه مختصات در ناحیه اول صفحه قرار دارد. پس $q_1 = \frac{p}{4}$ و لذا $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{p}{4} + i\sin\frac{p}{4}\right)$.

$$z_2 = \sqrt{3} - i \qquad : \qquad r_2 = \sqrt{3+(-1)^2} = 2$$

$$tg\, q_2 = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

و با توجه به این که نقطه متناظر به z_2 در صفحه مختصات در ناحیه چهارم صفحه قرار دارد پس $q_2 = \frac{-p}{6}$ و بنابراین $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{p}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{p}{6}\right)\right)$، در نتیجه

$$z_1.z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}-\frac{p}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{p}{4}-\frac{p}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{p}{12} + i\,\sin\frac{p}{12}\right)$$

و

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{p}{4}+\frac{p}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{p}{4}+\frac{p}{6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5p}{12} + i\,\sin\frac{5p}{12}\right).$$

قوای یک عدد مختلط: عدد مختلط $z = r(\cos q + i\,\sin q)$ را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه ۱

$$z^2 = z.z = r^2(\cos 2q + i\sin 2q), z^3 = r^3(\cos 3q + i\sin 3q)$$

و به استقراء دیده می‌شود که به ازای هر عدد طبیعی n.

$$z^n = r^n(\cos nq + i\,\sin nq),$$

یعنی برای آن که عددی مختلط را بتوان طبیعی n برسانیم کافی است مدول آن را بتوان n رسانیده و آرگومان آن را در n ضرب کنیم. در حالت خاصی که $r = 1$، داریم $z = \cos q + i\sin q$ و بنابراین به ازای هر $n \in N$،

$$(\cos q + i\sin q)^n = \cos nq + i\sin nq\,. \qquad (2)$$

فرمول (2) بنام **فرمول دموآور** معروف است. با بسط طرف چپ تساوی بوسیله دو جمله‌ای نیوتن و مساوی هم قرار دادن قسمت‌های حقیقی و نیز قسمت‌های موهومی در دو طرف تساوی می توانیم $\sin nq$ و $\cos nq$ را بر حسب قوای مختلف توابع $\cos q , \sin q$ بیان کنیم. به عنوان مثال، اگر $n = 3$ داریم

$$(\cos q + i\sin q)^3 = \cos 3q + i\sin 3q$$

یا

$$\cos^3 q + 3i\cos^2 q\sin q + 3i^2\cos q\sin^2 q + i^3\sin q = \cos 3q + i\sin 3q\ .$$

یا

$$\left(\cos^3 q - 3\cos q\sin^2 q\right) + i\left(3\cos^2 q\sin q - \sin^3 q\right) = \cos 3q + i\sin 3q\ .$$

بنابراین

$$\begin{cases} \cos 3q = \cos^3 q - 3\cos q\sin^2 q \\ \sin 3q = -\sin^3 q + 3\cos^2 q\sin q\ . \end{cases}$$

تعریف: عددی را **جبری** نامیم در صورتی که ریشه معادله‌ای به صورت

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

باشد، که در آن $a_n, \ldots, a_1, a_0$ اعدادی صحیح هستند.

مثال۲: (i) اعداد حقیقی b,a را چنان تعیین کنید که $z=1-i$ ریشه معادله $x^7+ax^5+b=0$ باشد.

(ii) نشان دهید که عدد $z=\sqrt[3]{4}-2i$ جبری است.

حل. (i) عدد $z=1-i$ را به صورت قطبی می‌نویسیم:

$$z=1-i: \qquad r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\ , tg\ q=\frac{y}{x}=-1\ .$$

چون نقطه متناظر با z در ناحیه چهارم واقع است پس $q=-\frac{p}{4}$ و لذا $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-p}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-p}{4}\right)\right)$. داریم

$$z^7=2^{\frac{7}{2}}\left(\cos\left(-\frac{7p}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{7p}{4}\right)\right)\ ,\quad z^5=2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\left(-\frac{5p}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{5p}{4}\right)\right)$$

این مقادیر را در معادله گذارده و بدست می‌آوریم

$$\left(2^{\frac{7}{2}}\cos\left(-\frac{7p}{4}\right)+a2^{\frac{5}{2}}\cos\left(-\frac{5p}{4}\right)+b\right)+i\left(2^{\frac{7}{2}}\sin\left(-\frac{7p}{4}\right)+a.2^{\frac{5}{2}}\sin\left(-\frac{5p}{4}\right)\right)=0$$

یا

$$\left(8\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{2}\,a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b\right)+i\left(8\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{2}\,a.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

یا

$$(8-4a+b)+i(8+4a)=0 \Leftrightarrow$$

$$8+4a=0 \quad \text{و} \quad 8-4a+b=0\,.$$

نتیجه می‌گیریم که $a=-2$, $b=-16$.

(ii) داریم $z=\sqrt[3]{4}-2i$ یا $z+2i=\sqrt[3]{4}$. طرفین تساوی اخیر را به توان سه رسانیده و بدست می‌آوریم

$$z^3+3z^2(2i)+3z(2i)^2+(2i)^3=4$$

یا

$$z^3-12z-4=i\left(8-6z^2\right).$$

اکنون طرفین آخرین معادله را به توان دو رسانیده و پس از ساده کردن بدست می‌آوریم

$$z^6+12z^4-8z^3+48z^2+96z+80=0\,.$$

که یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\sqrt[3]{4}-2i$ یک ریشه آن می‌باشد، بنابراین عدد $z=\sqrt[3]{4}-2i$ یک عدد جبری است.

نکته: عددی را که جبری نباشد یک **عدد متعالی** می‌نامند. اعداد π, e از جمله اعداد متعالی هستند. این مطلب در درس آنالیز ریاضی اثبات می‌گردد.

ریشه یک عدد مختلط: فرض کنیم z عددی مختلط و n عددی طبیعی باشد. عدد مختلط w را یک **ریشه n ام** عدد مختلط z نامیده و می‌نویسیم $w=\sqrt[n]{z}$ در صورتی که $w^n=z$.

اکنون با داشتن n,z عدد مختلط w را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. حال $w^n=z$ معادل است با

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (3)$$

چون نقاط متناظر به w^n, z در صفحه مختصات بر هم منطبق هستند از (3) نتیجه می‌شود که

$$\rho^n=r \quad \text{و} \quad n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

یا

$$\rho=\sqrt[n]{r} \quad , \varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\theta}{n} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

و لذا

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots\,.$$

چون به k تعداد نامتناهی مقدار می‌توان داد ممکن است این تصور پیش آید که z دارای تعداد نامتناهی ریشه n ام است. ثابت می‌کنیم که عدد مختلط z دقیقاً دارای n ریشه مرتبه n ام می‌باشد. فرض کنیم $m\in N$ و به k دو مقدار $m+n,m$ را نسبت می‌دهیم. داریم

$$w_m=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}\right)\right)$$

و

$$\begin{aligned}w_{m+n}&=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}+2p\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}+2p\right)\right)\\&=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2mp}{n}\right)\right)=w_m.\end{aligned}$$

بنابراین تنها n مقدار متوالی که به k نسبت داده شود ممکن است ریشه‌های مختلف z را بدست دهند. معمولاً

$$k=0,1,2,\ldots,n-1$$

اختیار می‌کنند. در مرحله بعد نشان می‌دهیم که اگر $0\le i,j\le n-1$ و $i\neq j$ آنگاه $w_i\neq w_j$. دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt[n]{r}$ رسم می‌کنیم. اولین ریشه

$$w_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{q}{n}+i\sin\frac{q}{n}\right)$$

متناظر به مقدار $k=0$ است. دومین ریشه

$$w_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2p}{n}\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2p}{n}\right)\right)$$

متناظر به مقدار $k=1$ است و ... و بالاخره n امین ریشه

$$w_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2(n-1)p}{n}\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2(n-1)p}{n}\right)\right)$$

متناظر به مقدار $k=n-1$ است. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود این ریشه‌ها به طور یکنواخت روی محیط دایره گسترده شده‌اند و لذا دوبدو متمایز هستند. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که عدد مختلط z دقیقاً دارای n ریشه دوبدو متمایز مختلط مرتبه n ام است که از دستور زیر بدست می‌آیند:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{q}{n}+\frac{2kp}{n}\right)+i\sin\left(\frac{q}{n}+\frac{2kp}{n}\right)\right).\qquad(4)$$
$$k=0,1,2,\ldots,n-1$$

شکل ۴

مثال ۳: (i) ریشه‌های دوم $z=2i$ را پیدا کنید.

(ii) ریشه‌های سوم $z=-i$ را پیدا کنید.

(iii) ریشه‌های چهارم $z=-16$ را پیدا کنید.

حل. (i)

$$z=2i=0+2i\ ,r=\sqrt{0+4}=2\ \ ,q=\frac{p}{2}$$

$$z=2\left(\cos\frac{p}{2}+i\sin\frac{p}{2}\right).$$

بنابراین

$$w_k=\sqrt[2]{2}\,(\cos(\frac{\frac{p}{2}}{2}+\frac{2kp}{2})+i\sin(\frac{\frac{p}{2}}{2}+\frac{2kp}{2}))$$

یا

$$w_k=\sqrt[2]{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}+kp\right)+i\sin\left(\frac{p}{4}+kp\right)\right)\ \text{و}\ k=0,1\,.$$

پس

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4}\right)=1+i\ \ ,\ \ w_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}+p\right)+i\sin\left(\frac{p}{4}+p\right)\right)=-(1+i)$$

(ii)

$$z=-i=\cos\frac{3p}{2}+i\sin\frac{3p}{2}$$

$$w_k = \cos\left(\frac{\frac{3p}{2}}{3} + \frac{2kp}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3p}{2}}{3} + \frac{2kp}{3}\right)$$

$$k = 0,1,2.$$

پس

$$w_0 = \cos\frac{p}{2} + i\sin\frac{p}{2} = i \qquad , \; w_1 = \cos\left(\frac{7p}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7p}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{p}{2} + \frac{4p}{3}\right) + i\sin\left(\frac{p}{2} + \frac{4p}{3}\right) = \cos\left(-\frac{p}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{p}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \; .$$

$$z = -16 : r = 16 \quad , q = p \qquad (iii)$$

$$z = 16\,(\cos p + i\sin p).$$

پس

$$w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{p}{4} + \frac{2kp}{4}\right) + i\sin\left(\frac{p}{4} + \frac{2kp}{4}\right)\right),$$

یا

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{p}{4} + \frac{kp}{2}\right) + i\sin\left(\frac{p}{4} + \frac{kp}{2}\right)\right) \qquad , k = 0,1,2,3.$$

در نتیجه

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{p}{4} + i\sin\frac{p}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1+i),$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{3p}{4} + i\sin\frac{3p}{4}\right) = \sqrt{2}\,(-1+i),$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5p}{4} + i\sin\frac{5p}{4}\right) = \sqrt{2}\,(-1-i),$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{7p}{4} + i\sin\frac{7p}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1-i).$$

قضیه ۲ (قضیه اساسی جبر): هر چند جمله‌ای درجه nام

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

که در آن $a_n, \ldots, a_1, a_0$ اعدادی حقیقی هستند بر میدان اعداد مختلط دارای n ریشه است که این ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط، ساده یا تکراری باشند.

اثبات. به کتب استاندارد در نظریه توابع مختلط مراجعه گردد.

قضیه۳: فرض کنیم

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (5)$$

یک چند جمله‌ای درجه n با ضرایب حقیقی باشد. اگر عدد مختلط z یک ریشه معادله (5) باشد، یعنی $f(z)=0$ آنگاه مزدوج آن $\bar{z}$ نیز یک ریشه معادله (5) است، یعنی $f(\bar{z})=0$.

اثبات. فرض کنیم $z=r(\cos q+i\sin q)$، در این صورت به ازای هر عدد طبیعی k، $z^k=r^k(\cos(kq)+i\sin(kq))$. بنابراین

$$\begin{aligned}
&f(z)=0\Leftrightarrow a_0\,z^n+a_1\,z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\,z+a_n=0\Leftrightarrow\\
&\quad a_0\,r^n\left(\cos(nq)+i\,\sin(nq)\right)+a_1r^{n-1}\left(\cos(n-1)q+i\,\sin(n-1)q\right)+\ldots\\
&\quad +a_{n-1}\,r\left(\cos q+i\,\sin q\right)+a_n=0\Leftrightarrow\\
&\quad [a_0\,r^n\cos(nq)+a\,r^{n-1}\cos(n-1)q+\ldots+a_{n-1}\,r\cos q+a_n]\\
&\quad +i\left[a_0\,r^n\sin(nq)+a_1r^{n-1}\sin(n-1)q+\ldots+a_{n-1}\,r\sin q\right]=0.
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف یک عدد مختلط بایستی داشته باشیم

$$\begin{cases}a_0r^n\cos(nq)+a_1\,r^{n-1}\cos(n-1)\;q+\ldots+a_{n-1}\,r\cos q+a_n=0\\ a_0\,r^n\sin(n\,q)+a_1r^{n-1}\sin(n-1)\;q+\ldots+a_{n-1}\,r\sin q=0\end{cases}\qquad(6)$$

اکنون $\bar{z}=r(\cos q-i\sin q)$ و به سادگی دیده می‌شود که (با توجه به (6))

$$\begin{aligned}
f\;(\bar{z})=&[a_0\,r^n\cos(nq)+a_1\,r^{n-1}\cos(n-1)\;q+\ldots+a_{n-1}\,r\cos q+a_n]\\
&-i[a_0\,r^n\sin(nq)+a_1\,r^{n-1}\sin(n-1)\;q+\ldots+a_{n-1}\,r\sin q]=0\,,
\end{aligned}$$

یعنی $\bar{z}$ نیز یک ریشه معادله $f(x)=0$ است.

نتیجه: فرض کنیم

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\,x+a_n=0$$

یک چند جمله‌ای از درجه فرد با ضرایب حقیقی باشد. در این صورت بنابر قضایای ۲ و ۳، معادله $f(x)=0$ لااقل دارای یک ریشه حقیقی است.

مثال ۴: (i) با استفاده از مختصات قطبی نشان دهید که $(-1+i)^7=-8(1+i)$.

(ii) تساوی زیر را ثابت کنید:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}(x\neq1)\,.$$

(iii) اگر w یکی از ریشه‌های n ام واحد به غیر از 1 باشد، نشان دهید که

$$1+w+w^2+\ldots+w^{n-1}=0\ .$$

حل. (i) $$z=-1+i: r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\,, tg\,q=\frac{y}{x}=-1, q=\frac{3p}{4}$$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3p}{4}+i\sin\frac{3p}{4}\right).$$

پس $$(-1+i)^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{21p}{4}+i\sin\frac{21p}{4}\right)=2^3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5p}{4}+i\sin\frac{5p}{4}\right)$$

$$=2^3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-8(1+i)\ .$$

(ii) فرض کنیم $s=1+x+x^2+\ldots+x^n$، پس $xs=x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}$ و لذا

$$s-xs=1-x^{n+1}\Leftrightarrow s(1-x)=1-x^{n+1}\Leftrightarrow$$

$$s=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.(x\neq 1)$$

(iii) در (ii) با قرار دادن $n-1$ به جای n و توجه به این مطلب که $w\neq 1$ داریم

$$s=1+w+w^2+\ldots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}=\frac{0}{1-w}=0$$.(زیرا $w^n=1$)

مثال ۵: (i) نشان دهید که اگر $a+ib$ ریشه مختلط معادله $x^3+qx+r=0$ باشد، آنگاه a ریشه حقیقی معادله $8x^3+2qx-r=0$ است.

(ii) اگر z عددی مختلط باشد مطلوبست محاسبه عبارت زیر

$$A=\left(z+\bar{z}\right)\ \left(z^2+\bar{z}^2\right)\ldots\left(z^n+\bar{z}^n\right).$$

(iii) مکان تصویر $z=x+iy$ را که در نامساوی زیر صدق می‌کند تعیین کنید:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\leq 2\ .$$

حل. (i) داریم

$$(a+ib)^3+q(a+ib)+r=0\Leftrightarrow a^3+3ia^2b-3ab^2-ib^3+iqb+r=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a^3-3ab^2+qa+r\right)+i\left(3a^2b-b^3+qb\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3a^2b-b^3+qb=0 & (1)\\ a^3-3ab^2+qa+r=0\ . & (2)\end{cases}$$

از معادله (1) داریم $b\left(3a^2-b^2+q\right)=0$ و چون بنابر فرض $a+ib$ یک عدد مختلط است پس $b\neq 0$ و لذا $3a^2-b^2+q=0$، یعنی $b^2=3a^2+q$. اگر این مقدار بدست آمده برای b^2 را در معادله (2) قرار دهیم بدست می‌آوریم

$$a^3-3a\left(3a^2+q\right)+qa+r=0\Rightarrow 8a^3+2qa-r=0\ ,$$

یعنی a یک ریشه معادله $8x^3+2qx-r=0$ است.

(ii) فرض کنیم $z=r(\cos q+i\sin q)$. در این صورت $\bar{z}=r(\cos q-i\sin q)$ و به ازای هر عدد طبیعی k

$$z^k=r^k(\cos kq+i\sin kq) \quad \text{و} \quad \bar{z}^k=r^k(\cos kq-i\sin kq).$$

بنابراین

$$z+\bar{z}=2r\cos q \quad , \quad z^2+\bar{z}^2=2r^2\cos 2q,\ldots,z^n+\bar{z}^n=2r^n\cos nq \ .$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A&=(2r\cos q)(2r^2\cos 2q)\ldots(2r^n\cos nq)\\ &=2^n\, r^{1+2+\ldots+n}\cos q\cos 2q\ldots\cos nq\\ &=2^n\, r^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos q\cos 2q\ldots\cos nq \ . \end{aligned}$$

(iii) داریم

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\frac{|z-i|}{|z+i|}\le 2 \ ,$$

پس $|z-i|\le 2|z+i|$. اگر $z=x+iy$ آنگاه

$$|x+i(y-1)|\le 2|x+i(y+1)|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}\le 2\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

و لذا $x^2+(y-1)^2\le 4\left(x^2+(y+1)^2\right)$ که پس از ساده نمودن بدست می‌آوریم

$$x^2+y^2+\frac{10}{3}y+1\ge 0\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2\ge\left(\frac{4}{3}\right)^2 ,$$

یعنی، مکان تصویر نقاط خارج و روی دایره به مرکز $c\left(0,\frac{-5}{3}\right)$ و شعاع $R=\frac{4}{3}$ می‌باشد.

تابع نمایی با نمای مختلط و خواص آن. فرض کنیم $z=x+iy$. اگر y,x متغیرهای حقیقی باشند، آنگاه z یک متغیر مختلط نامیده می‌شود. به هر مقدار از متغیر مختلط z در صفحه $xy-$ (صفحه مختلط) یک نقطه مشخص متناظر می‌گردد (شکل ۲ را ببینید).

تعریف: اگر به هر مقدار متغیر مختلط z از یک حوزه تعریف معین از مقادیر مختلط کمیت مختلط مشخص دیگری مانند w متناظر گردد، آنگاه w تابعی از متغیر مختلط z است. توابعی از یک متغیر مختلط با $w=f(z)$ یا $w=w(z)$ نشان داده می‌شوند.

در اینجا، تابع نمایی از یک متغیر مختلط را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$w=e^{x+iy} \quad \text{یا} \quad w=e^z$$

مقادیر مختلط w به طریق زیر تعریف شده‌اند:

$$e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right) \qquad (7)$$

یعنی

$$w(z)=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right). \qquad (8)$$

مثال ۶: (i) $z=1+\frac{p}{4}i$، پس $e^{1+\frac{p}{4}i}=e\left(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(ii) $z=0+\frac{p}{2}i$، پس $e^{0+\frac{p}{2}i}=e^{0}\left(\cos\frac{p}{2}+i\,\sin\frac{p}{4}\right)=i$.

(iii) $z=1+i$، پس $e^{1+i}=e^{1}\left(\cos 1+i\sin 1\right)\approx 0.54+i0.83$

(iv) $z=x$ عدد حقیقی است، پس $e^{x+0i}=e^{x}\left(\cos 0+i\,\sin 0\right)=e^{x}$
یک تابع نمایی معمولی است.

اکنون به بررسی خواص یک تابع نمایی می‌پردازیم:

1. اگر z_2, z_1 دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\,e^{z_2}. \qquad (9)$$

زیرا فرض کنیم $z_2=x_2+iy_2, z_1=x_1+iy_1$، در این صورت

$$e^{z_1+z_2}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$
$$=e^{x_1}\,e^{x_2}\left[\cos\left(y_1+y_2\right)+i\sin\left(y_1+y_2\right)\right]. \qquad (10)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه حاصلضرب دو عدد مختلط در شکل قطبی خواهیم داشت

$$e^{z_1}\,e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}\,e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)$$
$$=e^{x_1}\,e^{x_2}\left[\cos\left(y_1+y_2\right)+i\sin\left(y_1+y_2\right)\right]. \qquad (11)$$

در (10) و (11) طرف‌های راست با هم مساوی هستند، بنابراین طرف های چپ نیز با هم مساوی می باشند:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}.$$

2. فرمول زیر به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \qquad (12)$$

3. اگر m عددی صحیح باشد، آنگاه

$$\left(e^{z}\right)^{m}=e^{mz}. \qquad (13)$$

برای $m>0$،این فرمول را می‌توان از روی (9) بدست آورد؛ اگر $m<0$، آنگاه (13) را می‌توان از روی فرمول‌های (9) و (12) بدست آورد.

فرمول اویلر. شکل نمایی یک عدد مختلط

با قرار دادن $x=0$ در فرمول (7) بدست می‌آوریم

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y\,. \qquad (14)$$

این **فرمول اویلر** است که یک تابع نمایی با نمای موهومی را بر حسب توابع مثلثاتی بیان می‌کند.
با تعویض y به $-y$ در (14) بدست می‌آوریم

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y\,. \qquad (15)$$

از روی (14) و (15) توابع $\cos y$ و $\sin y$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \\ \sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\,. \end{cases} \qquad (16)$$

این فرمول‌ها به ویژه برای بیان توان‌های $\cos j$ و $\sin j$ و حاصلضرب‌های آن‌ها بر حسب سینوس و کسینوس از مضرب کمان‌ها بکار می‌روند.

مثال ۷: (1)

$$\cos^2 y=\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2iy}+2+e^{-2iy}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)+2+\left(\cos 2y-i\sin 2y\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(2\cos 2y+2\right)=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2y\right).$$

(2)

$$\cos^2 j\,\sin^2 j=\left(\frac{e^{ij}+e^{-ij}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ij}-e^{-ij}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{\left(e^{i2j}-e^{-i2j}\right)^2}{4.4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4j+\frac{1}{8}\,.$$

شکل نمایی یک عدد مختلط: فرض کنیم عدد مختلط z را به صورت قطبی نمایش داده باشیم:

$$z=r\left(\cos j+i\sin j\right)$$

که در آن r مدول عدد مختلط و j آرگومان عدد مختلط است. بنابر فرمول اویلر،

$$\cos j+i\sin j=e^{ij}\,. \qquad (17)$$

بنابراین، هر عدد مختلط را می‌توان به شکل نمایی نشان داد:

$$z = re^{ij} \ .$$

مثال ۸: اعداد مختلط 1, i, -2, $-i$ را به شکل نمایی نشان دهید.

حل. $1 = \cos 2kp + i \sin 2kp = e^{2kpi}$،

$$i = \cos\frac{p}{2} + i\sin\frac{p}{2} = e^{\frac{p}{2}i}$$

$$-2 = 2(\cos p + i \sin p) = 2e^{pi}$$

$$-i = \cos\left(\frac{-p}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{-p}{2}i \ .$$

بنابر خواص (9)، (12)، (13) از یک تابع نمایی اعمال بر اعداد مختلط در شکل نمایی آن بسیار آسان است. فرض کنیم که داشته باشیم

$$z_1 = r_1 e^{ij_1} \qquad , z_2 = r_2 e^{ij_2} \ .$$

در این صورت

$$z_1 z_2 = r_1 e^{ij_1} . r_2 e^{ij_2} = r_1 r_2 e^{i(j_1 + j_2)} \qquad (18)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{ij_1}}{r_2 e^{ij_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(j_1 - j_2)} \qquad (19)$$

$$z^n = (re^{ij})^n = r^n e^{inj} \qquad (20)$$

$$\sqrt[n]{re^{ij}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{j+2kp}{n}} \ (k = 0,1,2,\ldots,n-1) \ . \qquad (21)$$